Probabilitas = Peluang (Bagian II)

3. Peluang Suatu Kejadian

- Peluang dalam pengertian awam $\rightarrow$ "kemungkinan"

Mis : 1. Hari ini kemungkinan besar akan turun hujan
2. Kemungkinan tahun depan inflasi akan mencapai dua digit
3. dll.

- Peluang Kejadian dalam Statistika dinyatakan dalam ratio atau perbandingan

Peluang kejadian A dinotasikan sebagai P(A)

Peluang kejadian A adalah : jumlah peluang semua titik contoh yang menyusun kejadian A sehingga $\rightarrow$ $0 \leq P(A) \leq 1$

di mana :

$P(S) = 1$ $\rightarrow$ Peluang Kejadian yang pasti terjadi

$P(\varnothing) = 0$ $\rightarrow$ Peluang Kejadian yang pasti tidak terjadi

Contoh 1.

Sekeping uang logam setimbang (*balanced = tidak berat sebelah*) dilempar 2 kali.
Berapa peluang Kejadian B yaitu munculnya sisi GAMBAR minimal satu kali pada pelemparan tersebut?

Jawab :

Karena mata uang yang dilempar adalah mata uang yang setimbang maka setiap titik contoh dalam S berpeluang sama, yaitu w = ¼ (w : peluang tiap titik contoh ; 4w = 1; w = ¼)

S = {GG, GA, AG, AA} G = GAMBAR dan A = ANGKA

$$\begin{array}{cccc} GG & GA & AG & AA \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ w & w & w & w \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \rightarrow P(S) = 4w \rightarrow 1 = 4w \rightarrow w = \frac{1}{4}$$

B = kejadian munculnya <u>minimal</u> 1 sisi GAMBAR pada 2 kali pelemparan koin mata uang
Titik contoh yang menyusun kejadian B adalah { GG, GA. AG}
sehingga P(B) = ¼ + ¼ +¼ = ¾

Contoh 2 :

Suatu dadu diberi pemberat sedemikian rupa sehingga munculnya angka-angka genap berpeluang 2 kali dibanding angka-angka ganjil. E adalah kejadian munculnya mata bernilai kurang dari 4. Hitung P(E)!

$$\begin{array}{cccccc} S = \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ w & 2w & w & 2w & w & 2w \end{array} \rightarrow P(S) = 1 \rightarrow 1 = 9w \rightarrow w = \frac{1}{9}$$

$\frac{1}{9}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{2}{9}$

E = {1, 2, 3 }

P(E) = $\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

Dalil 1 Peluang Kejadian

Jika setiap titik contoh mempunyai peluang yang sama maka : $P(A) = \frac{n}{N}$

n : banyak titik contoh penyusun Kejadian A

N : banyak titik contoh dalam Ruang Contoh (S)

Contoh 3 :

Berapa peluang memperoleh kartu berwarna As hitam (♣ dan ♠) bila sebuah kartu diambil secara acak dari seperangkat kartu bridge?

n = banyak kartu As hitam = 2 dan N = 52

P(AS HITAM) = $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

Contoh 4 :

Terdapat 10 kandidat karyawan yang terdiri dari 6 Sarjana Ekonomi dan 4 Sarjana Teknik. Berapa peluang terpilih 3 orang yang terdiri dari 2 Sarjana Ekonomi dan 1 Sarjana Teknik? Semua kandidat berpeluang sama!

Pemilihan 2 dari 6 Sarjana Ekonomi = $C_2^6 = \frac{6!}{4!2!} = 15$

Pemilihan 1 dari 4 Sarjana teknik = $C_1^4 = \frac{4!}{3!1!} = 4$

n = Pemilihan 2 Sarjana Ekonomi dan 1 Sarjana Teknik = 15 x 4 = 60

N = Pemilihan 3 dari 10 kandidat karyawan = $C_3^{10} = \frac{10!}{3!7!} = 120$

P(2SE dan 1 ST) = $\frac{60}{120}$ = 0.5

- Bagaimana jika peluang setiap titik berpeluang tidak sama?

Misalnya : Mata uang tidak setimbang
Dadu yang diberi pemberat
Pengaruh warna/aroma produk pada preferensi pembeli?

Peluang untuk hal-hal tersebut dapat dilakukan dengan metode :

a) Subjektif → berdasarkan pengalaman, informasi tidak langsung, intuisi, perasaan

b) Frekuensi Kumulatif → melakukan percobaan berulang kali
Mis. : Pelemparan mata uang sebanyak 100 kali? 1000 kali?
Lalu catat berapa banyak sisi GAMBAR muncul!

4. Kaidah Penjumlahan Peluang Kejadian

Dalil 1. Kaidah Penjumlahan Peluang Kejadian

Bila A dan B adalah dua kejadian sembarang, maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

atau

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$A \cup B$ = kejadian A **atau** B
$A \cap B$ = kejadian A **dan** B

Contoh 5 :
Menurut catatan sebuah Bank, peluang Industri Manufakturing memperoleh kredit adalah 0.35. Sedangkan peluang Industri yang Padat Karya = 0.45. Peluang Industri yang tergolong Manufakturing atau Padat Karya = 0.25. Berapakah Peluang Industri Manufakturing dan Padat Karya memperoleh Kredit? (0.35 + 0.45 - 0.25 = 0.55)

Konsekuensi 1. Kaidah Penjumlahan Peluang

Bila A dan B adalah kejadian Saling Terpisah ($A \cap B = \varnothing$), maka : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Contoh 6 :
Berapakah peluang munculnya kartu bernilai 7 berwarna merah (A) atau bernilai 7 dengan hitam(B) pada pengambilan sebuah kartu secara acak dari seperangkat kartu bridge?

Pada pengambilan sebuah kartu tidaklah mungkin mendapatkan kartu bernilai 7 berwarna merah sekaligus berwarna hitam ($A \cap B = \varnothing$)

$$P(A \cup B) = 2/52 + 2/52 = 4/52 = 1/13$$

Konsekuensi 2. Kaidah Penjumlahan Peluang

Bila $A_1, A_2, \ldots, A_k$ saling terpisah, maka :
$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)$

Dalil 2. Kaidah Penjumlahan Peluang

Jika A dan A' adalah 2 kejadian yang berkomplemen, maka : $P(A) + P(A') = 1$

Contoh 7 :

Sekeping mata uang setimbang dilemparkan 6 kali. Berapa peluang sisi GAMBAR muncul minimal 1 kali P(A)?

S {GGGGGG, GGGGGA, ..., AAAAAA} G= GAMBAR A = ANGKA

banyak anggota S = 2^6 = 64 (Anda Percaya?)

A = kejadian munculnya GAMBAR minimal 1 kali pada pelemparan 6 kali

A' = kejadian munculnya GAMBAR = 0 pada pelemparan 6 kali = {AAAAA}

$P(A') = \frac{1}{64}$

$P(A) + P(A') = 1$

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

5. Peluang Bersyarat

Peluang Bersyarat berlaku untuk penetapan peluang kejadian yang tidak bebas.

Kejadian-kejadian yang bergantung dengan kejadian lain disebut : ***Kejadian Tidak Bebas***.

Contoh kejadian tidak bebas : pengambilan contoh tanpa pemulihan

Tanpa pemulihan = contoh yang telah terambil tidak dikembalikan ke dalam ruang contoh.

Kejadian yang terjadi tanpa bergantung dengan kejadian lain disebut Kejadian ***Bebas***.

Contoh kejadian bebas : pengambilan contoh dengan pemulihan

Dengan pemulihan = contoh yang telah terambil dikembalikan ke dalam ruang contoh.

Notasi Peluang Bersyarat : $P(B|A)$

Dibaca : "Peluang terjadinya B, bila A telah terjadi"

atau

"Peluang B, jika peluang A diketahui"

Contoh 8:

Terdapat 10 bola terdiri dari 4 bola merah dan 6 bola hitam. Pengambilan sebuah bola dilakukan tanpa pemulihan

Peluang Bola pertama berwarna Merah= P(MERAH) = $\frac{4}{10}$

Peluang Bola kedua berwarna Hitam = $P(\text{HITAM} | \text{MERAH}) = \frac{6}{9}$

Peluang Bola ketiga berwarna Hitam = $P(\text{HITAM} | \text{HITAM} | \text{MERAH}) = \frac{5}{8}$

Peluang Bola keempat berwarna Merah = P(MERAH | HITAM | HITAM | MERAH) = $3/7$

Definisi Peluang Bersyarat secara umum : $$P(B\mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$ $P(A) \neq 0$

Perhatikan : $P(B|A) \neq P(A|B)$
$P(A\cap B) = P(B\cap A)$

Contoh 9 : Peluang KRL berangkat tepat waktuP(B) = 0.50
Peluang KRL datang ke tepat waktu P(D) = 0.40
Peluang KRL berangkat dan datang tepat waktu $P(B\cap D) = 0.30$

a. Peluang KRL akan datang tepat waktu setelah berangkat tepat waktu?

$$P(D|B) = \frac{P(B\cap D)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$$

b. Peluang KRL akan berangkat tepat waktu setelah datang tepat waktu?

$$P(B|D) = \frac{P(B\cap D)}{P(D)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$$

Definisi : Dua Kejadian A dan B dikatakan ***<u>bebas</u>*** jika : $P(B\|A) = P(B)$ atau $P(A\|B) = P(A)$ Bila hal itu ***<u>tidak dipenuhi,</u>*** A dan B dikatakan ***<u>tidak bebas</u>***

6. Kaidah Penggandaan Peluang

Penghitungan peluang beberapa kejadian yang dapat terjadi sekaligus.

Dalil 1. Kaidah Penggandaan Peluang

Bila dalam suatu percobaan kejadian A dan B dapat terjadi **sekaligus**, maka : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B\|A)$ $= P(B \cap A)$ $= P(B) \times P(A \| B)$

Ingat : $A\cap B$ dibaca sebagai kejadian A **dan** B

Contoh 10 (Lihat Contoh 8)
Terdapat 10 bola terdiri dari 4 bola merah dan 6 bola hitam. Pengambilan sebuah bola dilakukan tanpa pemulihan

a) Peluang Bola pertama berwarna Merah= P(MERAH) = $4/10$

Peluang Bola kedua berwarna Hitam = P (HITAM | MERAH) = $6/9$

Peluang Bola pertama Merah dan Bola kedua Hitam = $4/10 \times 6/9 = 24/90 = 4/15$

b) Peluang Bola pertama berwarna Hitam = P(HITAM) = $6/10$

Peluang Bola kedua berwarna Merah = P(MERAH | HITAM) = $4/9$

Peluang Bola pertama Hitam dan Bola kedua Merah = $6/10 \times 4/9 = 24/90 = 4/15$

Dalil 2. Kaidah Penggandaan Peluang Kejadian Bebas

Bila A dan B adalah kejadian bebas, maka : $P(A \cap B) = P(A) \times (B)$

Contoh 10b:
Terdapat 10 bola terdiri dari 4 bola merah dan 6 bola hitam. Pengambilan sebuah bola dilakukan dengan pemulihan

Peluang Bola pertama berwarna Merah= P(MERAH) = $4/10$

Peluang Bola kedua berwarna Hitam = P (HITAM | MERAH) = P(HITAM) $6/10$

Peluang Bola pertama Merah dan Bola kedua Hitam = $4/10 \times 6/10 = 24/100 = 6/25$

Kaidah Penggandaan Peluang (secara umum)

Dalil 3. Kaidah Penggandaan Peluang (secara umum) Bila dalam suatu percobaan kejadian $A_1, A_2, ..., A_k$, maka : $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) = P(A\ ) \times P(A_2 \mid A_1) \times P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \ldots \times$ $P(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{k-1})$

☺ Selesai ☺