

Pendugaan Parameter

1. Pendahuluan

- Pendugaan Parameter Populasi dilakukan dengan menggunakan nilai Statistik Sampel

Misal :

1. \bar{x} digunakan sebagai penduga bagi μ
2. s digunakan sebagai penduga bagi σ
3. \bar{p} atau \hat{p} digunakan sebagai penduga bagi π atau p

Catatan : Beberapa pustaka menulis \bar{p} sebagai \hat{p} (p topi)

\bar{p} = proporsi "sukses" dalam contoh acak (ingat konsep percobaan binomial?)
 $1 - \bar{p} = \bar{q}$ = proporsi "gagal" dalam contoh acak

- Pendugaan parameter diwujudkan dalam pembentukan selang kepercayaan, karena hampir tidak pernah ditemukan nilai statistik tepat sama dengan nilai parameter.

- Selang Kepercayaan = Konfidensi Interval = Confidence Interval

- ☺ Didekati dengan distribusi Normal (Distribusi z atau Distribusi t)
- ☺ Mempunyai 2 batas : batas atas (kanan) dan batas bawah (kiri)
- ☺ Derajat Kepercayaan = Tingkat Kepercayaan = Koefisien Kepercayaan = $1 - \alpha$
- ☺ α kemudian akan dibagi ke dua sisi
 $\alpha/2$ di atas batas atas dan $\alpha/2$ di bawah batas bawah

- Selang kepercayaan menurut Distribusi z dan Distribusi t

- ☺ Selang Kepercayaan dengan Distribusi z (Tabel hal 175)

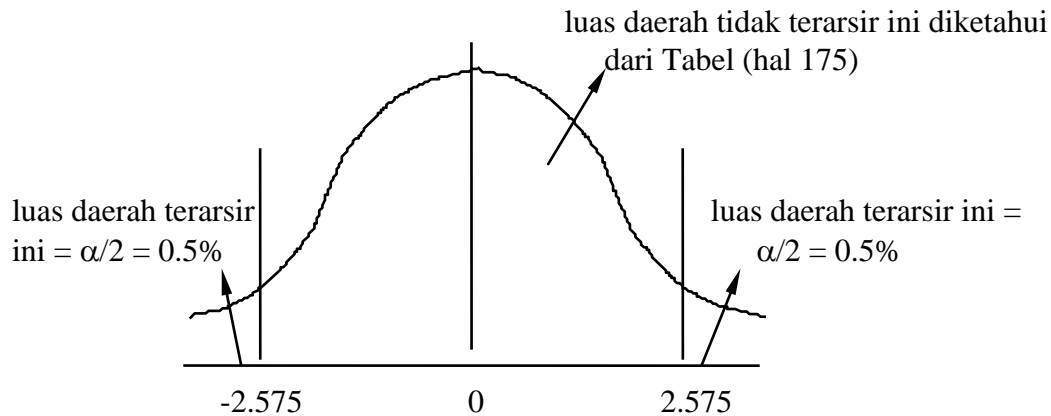
Nilai α dan Selang kepercayaan yang lazim digunakan antara lain :

Selang kepercayaan 90 % → Derajat Kepercayaan = $1 - \alpha = 90\%$
 $\alpha = 10\% \rightarrow \alpha/2 = 5\% \rightarrow z_{5\%} = z_{0.05} = 1.645$

Selang kepercayaan 95 % → Derajat Kepercayaan = $1 - \alpha = 95\%$
 $\alpha = 5\% \rightarrow \alpha/2 = 2.5\% \rightarrow z_{2.5\%} = z_{0.025} = 1.96$

Selang kepercayaan 99 % → Derajat Kepercayaan = $1 - \alpha = 99\%$
 $\alpha = 1\% \rightarrow \alpha/2 = 0.5\% \rightarrow z_{0.5\%} = z_{0.005} = 2.575$

Contoh Distribusi z untuk SK 99 %



☺ Selang Kepercayaan dengan Distribusi t (Tabel hal 177)

Nilai α (dan tentu saja $\alpha/2$) sudah diterakan dalam Tabel.

Perhatikan derajat bebas (db).

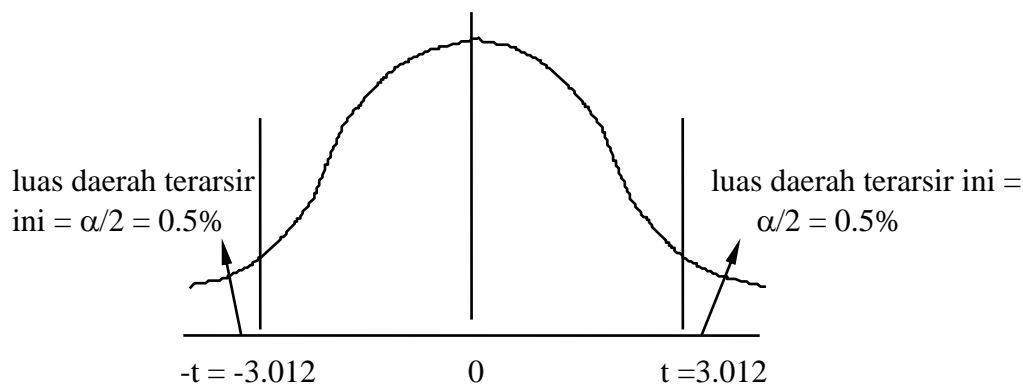
Nilai t tabel tergantung dari nilai derajat bebas (db) dan nilai $\alpha/2$ (Tabel hal 177)

Misal : Selang kepercayaan 99 %; db = 13 $\rightarrow 1 - \alpha = 99\%$

$\alpha = 1\% \rightarrow \alpha/2 = 0.5\%$

t tabel (db=13; $\alpha/2 = 0.5\%$) = 3.012

Contoh Distribusi t untuk SK 99 % ; db = 13



☛ Selang Kepercayaan yang baik?

Idealnya selang yang baik adalah *selang yang pendek* dengan *derajat kepercayaan yang tinggi*.

- Banyak Selang Kepercayaan yang dapat dibentuk dalam suatu populasi adalah Tidak terhingga, anda bebas menetapkan derajat kebebasan dan lebar selangnya.

Contoh 1 :

Di bawah ini terdapat 4 selang kepercayaan mengenai rata-rata umur mahasiswa. Semua selang dibuat untuk populasi yang sama, manakah yang paling baik?

- A. Selang kepercayaan 90 % rata-rata umur mahasiswa 18 - 25 tahun
- B. Selang kepercayaan 99 % rata-rata umur mahasiswa 18 - 27 tahun
- C. Selang Kepercayaan 90 % rata-rata umur mahasiswa 22 - 27 tahun
- D. Selang Kepercayaan 99 % rata-rata umur mahasiswa 22 - 25 tahun

Jawab : D, karena.....

- Bentuk Umum Selang Kepercayaan

Batas Bawah < (Simbol) Parameter < Batas Atas

Untuk Contoh Berukuran Besar :

Statistik - ($z_{\alpha/2}$ x Standard Error Sampel) < Parameter < Statistik + ($z_{\alpha/2}$ x Standard Error Sampel)

Untuk Contoh Berukuran Kecil :

Statistik - ($t_{(db;\alpha/2)}$ x Standard Error Sampel) < Parameter < Statistik + ($t_{(db;\alpha/2)}$ x Standard Error Sampel)

2. Pendugaan Nilai Tengah

2.1. Pendugaan Nilai Tengah dari contoh besar ($n \geq 30$)

- Nilai simpangan baku populasi (σ) diketahui
- Jika nilai simpangan baku populasi (σ) tidak diketahui → gunakan simpangan baku contoh (s)

Selang kepercayaan 1

Selang Kepercayaan sebesar $(1-\alpha)100\%$ bagi μ adalah :

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Jika σ tidak diketahui, dapat digunakan s

- Ukuran Contoh bagi pendugaan μ

Pada Derajat Kepercayaan $(1-\alpha)$ ukuran sampel yang error(selisih atau galat)nya tidak lebih dari suatu nilai E adalah

$$n = \left\lceil \left[\frac{z_{\alpha/2} \sigma}{E} \right]^2 \right\rceil$$

n dibulatkan ke bilangan bulat terdekat yang paling besar (fungsi ceiling)
jika σ tidak diketahui, gunakan s

E : error \rightarrow selisih \bar{x} dengan μ

Contoh 2

Dari 36 mahasiswa tingkat II diketahui bahwa rata-rata IPK = 2.6 dengan simpangan baku = 0.3.

- a. Buat selang kepercayaan 95 % untuk rata-rata IPK seluruh mahasiswa tingkat II?

Selang kepercayaan 95 % $\rightarrow \alpha = 5\% \rightarrow \alpha/2 = 2.5\% \rightarrow z_{2.5\%} = z_{0.025} = 1.96$

$$\bar{x} = 2.6, s = 0.3$$

$$\bar{x} - z_{0.025} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{0.025} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$2.6 - (1.96) \left(\frac{0.3}{\sqrt{36}} \right) < \mu < 2.6 + (1.96) \left(\frac{0.3}{\sqrt{36}} \right)$$

$$2.6 - 0.098 < \mu < 2.6 + 0.098$$

$$2.502 < \mu < 2.698$$

$$2.5 < \mu < 2.7$$

(catt : mengikuti nilai \bar{x} yang hanya mempunyai 1 desimal, nilai-nilai dalam selang dibulatkan satu desimal)

- b. Buat selang kepercayaan 99 % untuk rata-rata IPK seluruh mahasiswa tingkat II?

Selang kepercayaan 99 % $\rightarrow \alpha = 1\% \rightarrow \alpha/2 = 0.5\% \rightarrow z_{0.5\%} = z_{0.005} = 2.575$

(selanjutnya.....selesaikan sendiri!!!)

- c. Berapa ukuran contoh agar selisih rata-rata contoh (\bar{x}) dengan rata-rata populasi (μ) pada selang kepercayaan 95 % tidak lebih dari 10 %?

$$E = 10 \% = 0.10$$
$$s = 0.3$$

Selang kepercayaan 95 % $\rightarrow \alpha = 5 \% \rightarrow \alpha/2 = 2.5 \% \rightarrow z_{2.5\%} = z_{0.025} = 1.96$

$$n = \left[\frac{z_{0.025} s}{E} \right]^2 = \left[\frac{(1.96)(0.3)}{0.10} \right]^2 = (5.88)^2 = 34.5744 \approx 35$$

- d. Berapa ukuran contoh agar selisih rata-rata contoh (\bar{x}) dengan rata-rata populasi (μ) pada selang kepercayaan 99 % tidak lebih dari 6 %?

$$E = 6 \% = 0.06$$
$$s = 0.3$$

Selang kepercayaan 99 % $\rightarrow \alpha = 1 \% \rightarrow \alpha/2 = 0.5 \% \rightarrow z_{0.5\%} = z_{0.005} = 2.575$

(jawab : $n = 166 \rightarrow$ coba selesaikan dengan lengkap!!!)

- 2.2. Pendugaan Nilai Tengah dari contoh kecil ($n < 30$) dan nilai simpangan baku populasi (σ) tidak diketahui \rightarrow gunakan simpangan baku contoh (s^2)

Selang Kepercayaan 2

Selang Kepercayaan sebesar $(1-\alpha)100\%$ bagi μ adalah :

$$\bar{x} - t_{(db; \alpha/2)} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{(db; \alpha/2)} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

db = derajat bebas = $n-1$

Contoh 3 :

9 orang mahasiswa FE-GD rata-rata membolos sebanyak 10 hari/tahun dengan standar deviasi 1.8 hari.

- a. Buat selang kepercayaan 95 % bagi rata-rata banyaknya hari membolos setiap tahun untuk seluruh mahasiswa!

Selang kepercayaan 95 % $\rightarrow \alpha = 5\% \rightarrow \alpha/2 = 2.5\% = 0.025$

$$\bar{x} = 10 \quad s = 1.8$$

$$db = n-1 = 9-1 = 8 \quad t(8;0.025) = 2.306$$

$$\bar{x} - t_{(8;0.025)} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{(8;0.025)} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$10 - (2.306)(1.8/\sqrt{9}) < \mu < 10 + (2.306)(1.8/\sqrt{9})$$

$$10 - 1.3836 < \mu < 10 + 1.3836$$

$$8.6164 < \mu < 11.3836$$

- b. Buat selang kepercayaan 90 % bagi rata-rata banyaknya hari membolos setiap tahun untuk seluruh mahasiswa!

Selang kepercayaan 90 % $\rightarrow \alpha = 10\% \rightarrow \alpha/2 = 5\% = 0.05$

$$\bar{x} = 10 \quad s = 1.8$$

$$db = n-1 = 9-1 = 8 \quad t(8;0.05) = 1.860$$

(selanjutnya....., terserah anda!!!)

II.3. Pendugaan bagi Beda 2 Nilai Tengah dari contoh-contoh besar

dan nilai ragam populasi (σ_1^2 dan σ_2^2) diketahui

dan jika nilai ragam populasi (σ_1^2 dan σ_2^2) tidak diketahui \rightarrow gunakan ragam contoh (s_1^2 dan s_2^2)

Selang Kepercayaan 3

Selang Kepercayaan sebesar $(1-\alpha)100\%$ bagi $\mu_1 - \mu_2$ adalah :

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui \rightarrow gunakan s_1^2 dan s_2^2

Contoh 4

64 orang Jepang ditanyai, dan diketahui rata-rata setiap bulan mereka makan 48 kg ikan dengan ragam= 8. 56 orang Inggris ditanyai, dan diketahui rata-rata, setiap bulan mereka makan 28 kg ikan dengan ragam =7.

- a. Tentukan selang kepercayaan 95 % untuk beda rata-rata banyak ikan yang dimakan setiap bulan oleh seluruh orang Jepang dan orang Inggris

$$\begin{array}{lll} \bar{x}_1 = 48 & \bar{x}_2 = 28 & |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |48 - 28| = 20 \\ n_1 = 64 & n_2 = 56 & \\ s_1^2 = 8 & s_2^2 = 7 & \end{array}$$

Selang kepercayaan 95 % $\rightarrow \alpha = 5\% \rightarrow \alpha/2 = 2.5\% \rightarrow z_{2.5\%} = z_{0.025} = 1.96$

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$(20) - (1.96)\left(\sqrt{\frac{8}{64} + \frac{7}{56}}\right) < \mu_1 - \mu_2 < (20) + (1.96)\left(\sqrt{\frac{8}{64} + \frac{7}{56}}\right)$$

$$\begin{array}{l} 20 - 0.98 < \mu_1 - \mu_2 < 20 + 0.98 \\ 19.02 < \mu_1 - \mu_2 < 20.98 \end{array}$$

- b. Tentukan selang kepercayaan 99 % untuk beda rata-rata banyak ikan yang dimakan setiap bulan oleh seluruh orang Jepang dan orang Inggris (kerjakan sebagai latihan!!!)

II.4 Pendugaan bagi Beda 2 Nilai Tengah dari contoh-contoh kecil dan nilai kedua ragam populasi **tidak sama** ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) dan **tidak diketahui** \rightarrow gunakan ragam contoh (s_1^2 dan s_2^2)

Selang Kepercayaan 4

Selang Kepercayaan sebesar $(1-\alpha)100\%$ bagi $|\mu_1 - \mu_2|$ adalah

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| - t_{(db; \alpha/2)} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| + t_{(db; \alpha/2)} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$\text{derajat bebas (db)} = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\left[(s_1^2/n_1)^2 / (n_1 - 1) \right] + \left[(s_2^2/n_2)^2 / (n_2 - 1) \right]}$$

db : dibulatkan ke bilangan bulat terdekat

ATAU db dapat didekati dengan $n_1 + n_2 - 2$

Contoh 5./Latihan

12 orang Jepang ditanyai, dan diketahui rata-rata setiap bulan mereka minum 22 liter teh dengan simpangan baku = 4.

10 orang Inggris ditanyai, dan diketahui rata-rata, setiap bulan mereka minum 36 liter teh dengan simpangan baku = 5.

Jika dianggap bahwa **ragam** kedua populasi bernilai **tidak sama**, hitung :

- derajat bebas bagi distribusi t
- Tentukan selang kepercayaan 99 % untuk beda rata-rata banyak teh yang diminum setiap bulan oleh seluruh orang Jepang dan orang Inggris (kerjakan sebagai latihan!!!)

***** (tidak diberikan di kelas)

II.5 Pendugaan bagi Beda 2 Nilai Tengah dari contoh-contoh kecil dan nilai kedua ragam populasi **sama** ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) **tidak diketahui** → gunakan ragam contoh gabungan (s_{gab}^2)

Selang Kepercayaan 4

Selang Kepercayaan sebesar $(1-\alpha)100$ % bagi $\mu_1 - \mu_2$ adalah :

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| - t_{(db; \alpha/2)} \times s_{gab} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| + t_{(db; \alpha/2)} s_{gab} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$s_{gab}^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \text{ dan } s_{gab} = \sqrt{s_{gab}^2} \text{ dan derajat bebas} = n_1 + n_2 - 2$$

Contoh 6./Latihan

12 orang Jepang ditanyai, dan diketahui rata-rata setiap bulan mereka minum 22 liter teh dengan simpangan baku = 4.

10 orang Inggris ditanyai, dan diketahui rata-rata, setiap bulan mereka minum 26 liter teh dengan simpangan baku = 5.

Jika dianggap bahwa **ragam** kedua populasi bernilai **sama**, hitung :

- a. Ragam dan Simpangan baku gabungan kedua contoh
- b. Tentukan selang kepercayaan 99 % untuk beda rata-rata banyak teh yang diminum setiap bulan oleh seluruh orang Jepang dan orang Inggris (kerjakan sebagai latihan!!!)

II.6. Pendugaan Proporsi dari contoh besar

- Pengertian proporsi
 π = proporsi populasi
 \bar{p} = proporsi "sukses" dalam contoh acak
 $1 - \bar{p} = \bar{q}$ = proporsi "gagal" dalam contoh acak

Misal : kelas "sukses" \rightarrow "menyukai seafood"
kelas "gagal" \rightarrow "tidak menyukai seafood"

Pendugaan Proporsi lebih lazim menggunakan contoh besar, jadi lebih lazim menggunakan Distribusi z.

Selang Kepercayaan 6

Selang Kepercayaan sebesar $(1-\alpha)100\%$ bagi p adalah :

$$\bar{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} < \pi < \bar{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}$$

ingat $\rightarrow 1 - \bar{p} = \bar{q}$

- Ukuran Contoh

Ukuran Contoh pada Selang Kepercayaan $(1-\alpha)100\%$ dengan galat (selisih atau Error) tidak akan melebihi suatu nilai E adalah :

$$n = \left\lceil \frac{z_{\alpha/2}^2 \bar{p}\bar{q}}{E^2} \right\rceil \quad n \text{ dibulatkan ke atas !}$$

n : ukuran sampel
E : error \rightarrow selisih \bar{p} dengan π

Contoh 7.

Dari suatu contoh acak 500 orang diketahui bahwa 160 orang menyukai makan seafood.

- a. Tentukan selang kepercayaan 95 % bagi proporsi populasi yang menyukai seafood!!!

$$\text{Selang kepercayaan 95 \% } \rightarrow \alpha = 5 \% \rightarrow \alpha/2 = 2.5 \% \rightarrow z_{2.5\%} = z_{0.025} = 1.96$$
$$\bar{p} = 160/500 = 0.32$$

$$\bar{q} = 1 - \bar{p} = 0.68$$

$$\bar{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}} < \pi < \bar{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n}}$$

$$0.32 - (1.96) \sqrt{\frac{(0.32)(0.68)}{500}} < \pi < 0.32 + (1.96) \sqrt{\frac{(0.32)(0.68)}{500}}$$

$$0.28 < \pi < 0.36$$

- b. Berapa ukuran sampel agar kita dapat percaya 95 % bahwa beda proporsi contoh dengan proporsi populasi tidak lebih dari 0.02

$$n = \left\lceil \frac{z_{\alpha/2}^2 \bar{p}\bar{q}}{E^2} \right\rceil = \frac{(1.96)^2 (0.32)(0.68)}{(0.02)^2} = 2090$$

(Kerjakan c dan d sebagai latihan!!!)

- c. sama dengan (a) hanya Selang Kepercayaan = 99 %
d. sama dengan (b) E = 0.05 untuk Selang Kepercayaan 90 %

II.7. Pendugaan Beda 2 Proporsi dari contoh-contoh besar

Selang Kepercayaan-7

Selang Kepercayaan sebesar $(1-\alpha)100\%$ bagi $|\pi_1 - \pi_2|$ adalah :

$$|\bar{p}_1 - \bar{p}_2| - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}_1 \bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{q}_2}{n_2}} < |\pi_1 - \pi_2| < |\bar{p}_1 - \bar{p}_2| + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}_1 \bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{q}_2}{n_2}}$$

Contoh 8.

Dari 1000 penduduk Jakarta, 700 menyetujui berlakunya aturan lalulintas baru ($\bar{p}_1=0.70$)

Dari 800 penduduk Surabaya, hanya 200 yang tidak menyetujui aturan lalulintas baru ($\bar{q}_2 = 0.25$)

Tentukan selang kepercayaan 90 % bagi beda proporsi penduduk Jakarta dan Surabaya yang menyetujui berlakunya aturan lalulintas baru!!!

kelas "sukses" = menyetujui berlakunya aturan lalulintas baru!!!

$$\begin{aligned}\bar{p}_1 = 0.70 & \rightarrow \bar{q}_1 = 1 - \bar{p}_1 = 1 - 0.70 = 0.30 \\ \bar{q}_2 = 0.25 & \rightarrow \bar{p}_2 = 1 - \bar{q}_2 = 1 - 0.25 = 0.75\end{aligned}$$

$$|\bar{p}_1 - \bar{p}_2| = |0.70 - 0.75| = 0.05$$

Selang kepercayaan 90 % $\rightarrow \alpha = 10\%$ $\rightarrow \alpha/2 = 5\%$ $\rightarrow z_{5\%} = z_{0.05} = 1.645$

$$|\bar{p}_1 - \bar{p}_2| - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}_1 \bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{q}_2}{n_2}} < |\pi_1 - \pi_2| < |\bar{p}_1 - \bar{p}_2| + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}_1 \bar{q}_1}{n_1} + \frac{\bar{p}_2 \bar{q}_2}{n_2}}$$

$$(0.05) - (1.645) \sqrt{\frac{(0.7)(0.3)}{1000} + \frac{(0.75)(0.25)}{800}} < |\pi_1 - \pi_2| < (0.05) + (1.645) \sqrt{\frac{(0.7)(0.3)}{1000} + \frac{(0.75)(0.25)}{800}}$$

$$(0.05) - (1.645)(0.02108...) < |\pi_1 - \pi_2| < (0.05) + (1.645)(0.02108...)$$

$$(0.05) - (0.03467...) < |\pi_1 - \pi_2| < (0.05) + (0.03467...)$$

$$0.01532... < |\pi_1 - \pi_2| < 0.08467...$$

☸ selesai ☸